数理解析研究所講究録
339巻 1978年 132-143



# 連分数最良化の実用的計算法

日立システム研　浜田穂積

## 1. はじめに

Maehly[1]，山内[2]などにより，連分数の最良化は研究されている。しかし手計算による式の展開などのため，高次の公式の計算は現実的には解決が困難である。一方多項式の最良化は，計算機を用いる，単純で汎用的な手法が種々開発されており，高次の公式を得るにはむしろその方が現実的である。連分数の最良化に，多項式の場合の手法をとり入れようとしても，なお高次の非線型性が残り，計算を困難にしている。

この困難を克服するために反復法を用いたが，ここではその方法を示し，併せて計算結果をも示す。

## 2. 計算の方針

多項式の最良化の方法として，テーラー展開の係数に対する補正量を計算するものを山内[2]が示し，戸田[2]が具体的計算を行なっている。この方法の特徴は，計算にそれほど高い

精度を用いなくても，かなり高精度の公式用の係数が計算できることにある。その理由は次のことであろうと考えられる。すなわち，$\sin x$ を $\frac{\pi}{4} \geq |x|$ の範囲で近似する場合を考えると，

$$(1+d_1)x+\left(-\frac{1}{6}+d_2\right)x^3+\left(\frac{1}{120}+d_3\right)x^5+\left(-\frac{1}{5040}+d_4\right)x^7$$
$$\simeq x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}-\frac{x^7}{5040}+\frac{x^9}{362880}-\cdots=\sin x \qquad (1)$$

の近似を行なうことは，

$$d_1 x+d_2 x^3+d_3 x^5+d_4 x^7$$
$$\simeq \frac{x^9}{362880}-\frac{x^{11}}{39916800}+\cdots=u \qquad (2)$$

の近似を行なうことと等価である。しかるに，(1)と(2)の値は $|x| \leq \frac{\pi}{4}$ の範囲でそれぞれ

$$|\sin x| \leq 7.1\times10^{-1}, \quad |u| \leq 3.1\times10^{-7} \qquad (3)$$

と，値のオーダにかなりの差がある。また，補正量のオーダが，被補正量のそれに比べてかなり小であること。などがその理由と考えられる。

さて，有理式の最良化を，多項式のそれと同程度に能率的な方法で計算したい。有理式の最良化の具体的計算法として山下[3)]のプログラムが知られている。ただこれは原理的計算法というようなもので，上述の多項式の場合の工夫は含まれていないため，多項式の場合と比べ，収束も遅く，あまり高い精度の公式も得られない。そこで多項式の場合からの類推から，有限項の展開の係数に対する補正量の計算により最良

近似有理式を得ることを考える。有理式の形での展開の有限項の打切りの最も簡単な形の一つはPadé展開であるから，Padé展開の係数に対する補正量として計算してみた。その結果の一例は次の通りである。

$$\tan x \simeq \frac{(105+c_1)x+(-10+c_3)x^3}{105+(-45+c_2)x^2+(1+c_4)x^4} \tag{4}$$

において，各補正量 $c_i$ は次の通りである。

$$\left.\begin{array}{l} c_1 = -0.0000\underline{014872} \\ c_2 = -0.0\underline{592563375} \\ c_3 = -0.0\underline{591858053} \\ c_4 = \phantom{-}0.0\underline{202700272} \\ \\ |x| \leq \frac{\pi}{4} \text{ において } |\text{相対誤差}| \leq 1.42 \times 10^{-8} \end{array}\right\} \tag{5}$$

この方法は先に述べた山下のプログラムより多少改良された結果となったが，多項式の場合ほど効果的ではなかった。その理由の最大のものは次に述べることである。多項式との比較のため，先の $\sin x$ の数値を示す。

$$\sin x \simeq x\left(1+d_1-\frac{x^2}{6}\left(1+d_2-\frac{x^2}{20}\left(1+d_3-\frac{x^2}{42}(1+d_4)\right)\right)\right) \tag{6}$$

において，各補正量 $d_i$ 等は次の通りである。

$$\left.\begin{array}{l} d_1 = -0.0000000\underline{032382} \\ d_2 = -0.000000\underline{986546} \\ d_3 = -0.000\underline{1580256} \\ d_4 = -0.0\underline{1710817} \\ \\ |x| \leq \frac{\pi}{4} \text{ において } |\text{相対誤差}| \leq 3.24 \times 10^{-9} \end{array}\right\} \tag{7}$$

(5)と(7)を比較すると，(7)では小数点以下の有効桁数を多く必要とする係数ほど，値（の絶対値）が小であるため，浮動

小数点演算の性質とよくマッチして，好都合な性質であることがわかる。筆者の計算した例では，Padé 展開の係数に対する補正量 $c_i$ と多項式の係数に対する補正量 $d_i$（番号は(4)(6)のようにとる）には，すべて次の関係が認められた。

$$|c_2| \doteqdot |c_3| > |c_4| > \cdots > |c_n| >> |c_1| \tag{8}$$

$$|d_1| < |d_2| < |d_3| < \cdots < |d_n| \tag{9}$$

ところで(4)を次の形の連分数

$$\tan x \simeq \frac{x}{1+d_1} + \frac{-x^2}{3+d_2} + \frac{-x^2}{5+d_3} + \frac{-x^2}{7+d_4} \tag{10}$$

に展開した場合，$d_i = 0$ とすれば(10)の右辺は $\tan x$ の無限連分数展開の打切りであるから $d_i$ は補正量である。このとき $d_i$ 等の値は次の通りである。

$$\left.\begin{aligned} d_1 &= 0.00000000\underline{14164} \\ d_2 &= -0.00000\underline{607588} \\ d_3 &= 0.00\underline{11660946} \\ d_4 &= -0.\underline{14065714} \\ |x| \leq \frac{\pi}{4} &\text{ において} |\text{相対誤差}| \leq 1.42 \times 10^{-8} \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

この場合も(9)の関係が成り立つので，好都合な性質である。したがって，有理式の形の最良近似式は，連分数の係数を求める方針とすればよい結果が期待できる。

## 3. 連分数打切りの最良化

連分数の表現は次に示す漸化式による。

$$f_i(x) = a_i + \frac{b_i x}{f_{i+1}(x)} \tag{12}$$

被近似関数は $x/f_1(x)$，$1/f_1(x)$ などの形をとることが多い。

また，奇関数，偶関数では右辺の分子は $b_i x^2$ となるが，ここでは一般的な場合について述べる。$f_i(x)$ に対応して，近似関数の場合は

$$g_i(x) = a_i + d_i + \frac{b_i x}{g_{i+1}(x)} \quad , \quad g_n(x) = a_n + d_n \tag{13}$$

である。

最良化の計算法は通常行なわれる，繰返しによるものとするとき，$E(x)$, $\frac{\partial E(x)}{\partial d_i}$ （$E(x)$ は誤差関数）は次の通りである。（被近似関数は $x/f_1(x)$ とし，相対誤差の最良化の場合）

$$E(x) = \frac{x/g_1(x) - x/f_1(x)}{x/f_1(x)}$$

$$= -\frac{1}{g_1}\left(d_1 - \frac{b_1 x}{f_2 g_2}\left(d_2 - \cdots - \frac{b_{n-1} x}{f_n g_n}\left(d_n - \frac{b_n x}{f_{n+1}}\right)\cdots\right)\right) \tag{14}$$

$$\frac{\partial E(x)}{\partial d_i} = (-1)^i f_1 \frac{b_1 \cdot \cdots \cdot b_{i-1}}{(g_1 \cdot \cdots \cdot g_i)^2} x^{i-1} \tag{15}$$

$\tan x$ の最良化の場合は，$a_i = 2i-1$, $b_i = -1$ とし，$x$ を $x^2$ で置き換えればよいが，近似区間が原点について対称であるから，$0 \leq x^2 \leq \frac{\pi}{4}$ と考えてよい。この計算結果を付録に示す。MREは最大相対誤差である。次の列（右から第3列）は，第1のデータは偏差点における誤差のばらつきの度合を示すもので，次の値である。偏差点における誤差を $e_j$（$n+1$ 個）とするとき，

$$-\log_{10} \frac{\max_j |e_j| - \min_j |e_j|}{\max_j |e_j|} \tag{16}$$

であり，この値が4以上であれば十分最良近似であるといってよいと考えられる。（$n=2$ のとき 15.6 である）この列の他のデータは，対応する $d_i$ にどれだけの変化を与えれば，最大相対誤差にどれだけの変化を受けるかを示すもので，$d_i$ の有効数字を定めるためのものである。すなわち

$$p_i = \log_{10}\left( \max_j \left| \frac{\partial E(x_j)}{\partial d_i} \right| / \max_j |e_j| \right) \qquad (17)$$

であって，$d_i$ を小数点以下 $p_i+4$ 桁程度採用すればよい，ということを示している。

右第2列の最初のデータは，収束するまでに要した繰返し数，残りは偏差点の座標（$x^2$ の値）である。右端の列は偏差点における誤差の符号と，ばらつきをチェックするためのもので，$\max_j |e_j|$ で正規化してある。

exp $x$ の最良化も同様にできる。この場合は

$$e^x = 1 + \frac{2x}{h(x) - x} \qquad (18)$$

とするとき

$$h(x) = 2 + \frac{x^2}{6} + \frac{x^2}{10} + \cdots + \frac{x^2}{4i-2} + \cdots \qquad (19)$$

である。また $h(x)$ の近似式を $\theta(x)$ とするとき

$$\theta(x) = 2 + d_1 + \frac{x^2}{6+d_2} + \frac{x^2}{10+d_3} + \cdots + \frac{x^2}{4n-2+d_n} \qquad (20)$$

であるとする。このとき最良化の対象とする関数を

$$E(x) = x \cdot \frac{h(x) - \theta(x)}{h(x)\theta(x) - x^2} \qquad (21)$$

とすれば

$$e^{x}=\frac{h(x)+x}{h(x)-x}=\frac{1-E(x)}{1+E(x)}\cdot\frac{\theta(x)+x}{\theta(x)-x}, \tag{22}$$

また相対誤差は

$$\frac{2E(x)}{1-E(x)} \tag{23}$$

であり，ほぼ最良であってかつ対称性のよい近似式が得られる。この場合の $E(x)$, $\frac{\partial E(x)}{\partial d_i}$ は (14), (15) とほとんど同じで，ただそれに一定の因子が掛けられたものである。この場合の結果も付録に示す。

## 4. 結言

有理式の形の最良近似式は，連分数展開の打切りの係数に対する補正量の計算とすれば，能率的に計算でき，かつ高い精度の公式まで得られることと，その計算法を示した。また計算結果の一部の数値データも示した。この例の場合計算精度は16進14桁（10進で約16桁）で，$\tan x$ では $4\times10^{-38}$, $\exp x$ では実に $5\times10^{-56}$ の誤差の公式まで計算できている。この程度の好結果が得られるのは，近似区間内で比較的性質のよい関数の場合であるといえようが，実際的にはこの方法でカバーできる範囲はかなり広いと考えている。なお，関数ルーチンでの計算方法として，多項式の比の形の有理式を用いたいときは，ここで述べた最良近似連分数を変形して得る方がよいということはいうまでもないであろう。

## 参考文献

[1] Maehly, H. J.; Methods for Fitting Rational Approximations, Part I : J. of ACM 7 (1960) 150-162, Part II, III : J. of ACM 9 (1962) 257-277

[2] 山内二郎, 森口繁一, 一松信編: 電子計算機のための数値計算法 II, 培風館 (1967)

[3] 山下真一郎: 有理式の最良近似式を求めるプログラム, 情報処理, 10, 6 (1967)

## 付 録

TAN(X) R=0,7853982

| N | I | D(I) | MRE | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | 15,60 | 2 | -1,000 |
| 2 | 1 | 1,3037929752988941E-03 | 1,302E-03 | 2,99 | 0,331704 | 1,000 |
| | 2 | -1,2934853229009223E-01 | | 1,86 | 0,000000 | -1,000 |
| | | | | 7,54 | 2 | -1,000 |
| 3 | 1 | -5,7731485243172650E-06 | 5,773E-06 | 5,34 | 0,476126 | 1,000 |
| | 2 | 1,3694982611168618E-03 | | 4,22 | 0,168095 | -1,000 |
| | 3 | -1,3667813684153797E-01 | | 2,63 | 0,000000 | 1,000 |
| | | | | 7,64 | 2 | -1,000 |
| 4 | 1 | 1,4163885271159320E-08 | 1,416E-08 | 7,95 | 0,533750 | 1,000 |
| | 2 | -6,0758830143290816E-06 | | 6,83 | 0,323033 | -1,000 |
| | 3 | 1,1660945892362336E-03 | | 5,23 | 0,097712 | 1,000 |
| | 4 | -1,4065714315807172E-01 | | 3,35 | 0,000000 | -1,000 |
| | | | | 7,56 | 2 | -1,000 |
| 5 | 1 | -2,2087139615001369E-11 | 2,209E-11 | 10,76 | 0,562124 | 1,000 |
| | 2 | 1,5000755492569874E-08 | | 9,63 | 0,414687 | -1,000 |
| | 3 | -4,6210337482030911E-06 | | 8,04 | 0,224093 | 1,000 |
| | 4 | 9,9209191933463840E-04 | | 6,15 | 0,063104 | -1,000 |
| | 5 | -1,4316379746727778E-01 | | 4,05 | 0,000000 | 1,000 |
| | | | | 7,81 | 2 | -1,000 |
| 6 | 1 | 2,3633444611778217E-14 | 2,383E-14 | 13,73 | 0,578125 | 1,000 |
| | 2 | -2,3540026889619641E-11 | | 12,60 | 0,470412 | -1,000 |
| | 3 | 1,0619905639232129E-08 | | 11,01 | 0,318768 | 1,000 |
| | 4 | -3,4755209849721913E-06 | | 9,12 | 0,161955 | -1,000 |
| | 5 | 8,5748558367006495E-04 | | 7,00 | 0,043899 | 1,000 |
| | 6 | -1,4488805457329527E-01 | | 4,72 | 0,000000 | -1,000 |
| | | | | 7,89 | 2 | -1,000 |
| 7 | 1 | -1,8855338417254486E-17 | 1,886E-17 | 16,83 | 0,588020 | 1,000 |
| | 2 | 2,5549612874078809E-14 | | 15,70 | 0,506270 | -1,000 |
| | 3 | -1,5865208514216596E-11 | | 14,11 | 0,385642 | 1,000 |
| | 4 | 7,3125693631234455E-09 | | 12,22 | 0,248343 | -1,000 |
| | 5 | -2,6719590052334541E-06 | | 10,11 | 0,121603 | 1,000 |
| | 6 | 7,5299941953372334E-04 | | 7,82 | 0,032227 | -1,000 |
| | 7 | -1,4614684503036658E-01 | | 5,39 | 0,000000 | 1,000 |
| | | | | 8,04 | 2 | -1,000 |
| 8 | 1 | 1,1405678194574928E-20 | 1,141E-20 | 20,05 | 0,594558 | 1,000 |
| | 2 | -2,0299473158817713E-17 | | 18,92 | 0,530549 | -1,000 |
| | 3 | 1,6608723622334641E-14 | | 17,33 | 0,433307 | 1,000 |
| | 4 | -1,0225133404570313E-11 | | 15,44 | 0,316409 | -1,000 |
| | 5 | 5,1403234254735936E-09 | | 13,32 | 0,197175 | 1,000 |
| | 6 | -2,1060002799298768E-06 | | 11,04 | 0,094290 | -1,000 |
| | 7 | 6,7033512809807316E-04 | | 8,60 | 0,024632 | 1,000 |
| | 8 | -1,4710624440613845E-01 | | 6,05 | 0,000000 | -1,000 |
| | | | | 8,22 | 2 | -1,000 |
| 9 | 1 | -5,4464420392637462E-24 | 5,446E-24 | 23,37 | 0,599103 | 1,000 |
| | 2 | 1,2327103707085259E-20 | | 22,24 | 0,547695 | -1,000 |
| | 3 | -1,2846997992948529E-17 | | 20,65 | 0,468060 | 1,000 |
| | 4 | 1,0168230759997643E-14 | | 18,76 | 0,368952 | -1,000 |
| | 5 | -6,6976892375542438E-12 | | 16,65 | 0,261795 | 1,000 |
| | 6 | 3,7167100410534930E-09 | | 14,36 | 0,159540 | -1,000 |
| | 7 | -1,6977567540546090E-06 | | 11,92 | 0,075080 | 1,000 |
| | 8 | 6,0359747306210732E-04 | | 9,36 | 0,019425 | -1,000 |
| | 9 | -1,4786170918656543E-01 | | 6,70 | 0,000000 | 1,000 |

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | 8,26 | 2 | -1,000 |
| 10 | 1 | 2,1052985384415546E-27 | 2,105E-27 | 26,78 | 0,602389 | 1,000 |
| | 2 | -5,9058802065625549E-24 | | 25,65 | 0,560230 | -1,000 |
| | 3 | 7,6372358762564936E-21 | | 24,06 | 0,494019 | 1,000 |
| | 4 | -7,5490282592585003E-18 | | 22,17 | 0,409648 | -1,000 |
| | 5 | 6,2908621159072388E-15 | | 20,06 | 0,314922 | 1,000 |
| | 6 | -4,5135597307051341E-12 | | 17,77 | 0,218956 | -1,000 |
| | 7 | 2.7613805632112927E-09 | | 15,33 | 0,131340 | 1,000 |
| | 8 | -1,3955034095754275E-06 | | 12,77 | 0,061113 | -1,000 |
| | 9 | 5,4871535445648846E-04 | | 10,11 | 0,015704 | 1,000 |
| | 10 | -1,4847201227062463E-01 | | 7,34 | 0,000000 | -1,000 |
| | | | | 8,43 | 2 | -1,000 |
| 11 | 1 | -6,7224351386305720E-31 | 6,722E-31 | 30,28 | 0,604840 | 1,000 |
| | 2 | 2,2893349786925854E-27 | | 29,15 | 0,569662 | -1,000 |
| | 3 | -3,5968667143214196E-24 | | 27,56 | 0,513848 | 1,000 |
| | 4 | 4,3398059614398719E-21 | | 25,67 | 0,441515 | -1,000 |
| | 5 | -4,4555509475612692E-18 | | 23,55 | 0,358160 | 1,000 |
| | 6 | 3,9983327093859250E-15 | | 21,27 | 0,270335 | -1,000 |
| | 7 | -3,1319327324055056E-12 | | 18,83 | 0,185172 | 1,000 |
| | 8 | 2,1020114565823802E-09 | | 16,27 | 0,109795 | -1,000 |
| | 9 | -1,1662500329357658E-06 | | 13,60 | 0,050667 | 1,000 |
| | 10 | 5,0285046246765144E-04 | | 10,84 | 0,012955 | -1,000 |
| | 11 | -1,4997532178408140E-01 | | 7,99 | 0,000000 | 1,000 |
| | | | | 7,53 | 2 | -1,000 |
| 12 | 1 | 1,8030569610452629E-34 | 1,803E-34 | 33,85 | 0,606716 | 1,000 |
| | 2 | -7,3278728459006019E-31 | | 32,72 | 0,576929 | -1,000 |
| | 3 | 1,3748018375295561E-27 | | 31,13 | 0,529303 | 1,000 |
| | 4 | -1,9876897376567090E-24 | | 29,24 | 0,466797 | -1,000 |
| | 5 | 2,4621724171931553E-21 | | 27,13 | 0,393393 | 1,000 |
| | 6 | -2,6952164477796394E-18 | | 24,84 | 0,313900 | -1,000 |
| | 7 | 2,6179775251250709E-15 | | 22,40 | 0,233675 | 1,000 |
| | 8 | -2.2328404895621093E-12 | | 19,84 | 0,158270 | -1,000 |
| | 9 | 1,6344248386103243E-09 | | 17,17 | 0,093028 | 1,000 |
| | 10 | -9,8859662344198267E-07 | | 14,41 | 0,042662 | -1,000 |
| | 11 | 4,6398061234414086E-04 | | 11,55 | 0,010868 | 1,000 |
| | 12 | -1,4939750343226583E-01 | | 8,63 | 0,000000 | -1,000 |
| | | | | 6,63 | 2 | -1,000 |
| 13 | 1 | -4,1195409575818218E-38 | 4,120E-38 | 37,49 | 0,608185 | 1,000 |
| | 2 | 1,9696052385129302E-34 | | 36,36 | 0,582648 | -1,000 |
| | 3 | -4,3491250667080486E-31 | | 34,77 | 0,541563 | 1,000 |
| | 4 | 7,4204979108986223E-28 | | 32,88 | 0,487124 | -1,000 |
| | 5 | -1,0904158753435046E-24 | | 30,77 | 0,422275 | 1,000 |
| | 6 | 1,4276739951521954E-21 | | 28,48 | 0,350620 | -1,000 |
| | 7 | -1,6788109557254356E-18 | | 26,04 | 0,276235 | 1,000 |
| | 8 | 1,7637124242574207E-15 | | 23,48 | 0,203453 | -1,000 |
| | 9 | -1,6308950626053843E-12 | | 20,81 | 0,136608 | 1,000 |
| | 10 | 1,2945804714641308E-09 | | 18,05 | 0,079756 | -1,000 |
| | 11 | -8,4831606748568108E-07 | | 15,19 | 0,036400 | 1,000 |
| | 12 | 4,3063747318949525E-04 | | 12,26 | 0,009246 | -1,000 |
| | 13 | -1,4975670776490208E-01 | | 9,26 | 0,000000 | 1,000 |

EXP(X) R=0,3465736

| N | I | D(I) | MRE | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | 12,73 | 2 | -1,000 |
| 2 | 1 | 1,2505728199246584E-05 | 4,340E-07 | 5,61 | 0,280522 | 1,000 |
| | 2 | 1,5019523956101914E-02 | | 3,13 | 0,107236 | -1,000 |
| | | | | 12,70 | 2 | 1,000 |
| 3 | 1 | 3,7581157510490897E-09 | 9,310E-11 | 9,27 | 0,312291 | -1,000 |
| | 2 | 9,0094824987402926E-06 | | 6,80 | 0,216173 | 1,000 |
| | 3 | 1,5016657648526547E-02 | | 3,87 | 0,077169 | -1,000 |
| | | | | 13,50 | 2 | -1,000 |
| 4 | 1 | 5,7592468253789379E-13 | 1,109E-14 | 13,20 | 0,325687 | 1,000 |
| | 2 | 2,3013920010109912E-09 | | 10,72 | 0,265534 | -1,000 |
| | 3 | 6,8965783201936630E-06 | | 7,80 | 0,173337 | 1,000 |
| | 4 | 1,5015618181702669E-02 | | 4,58 | 0,060205 | -1,000 |
| | | | | 6,58 | 1 | 1,000 |
| 5 | 1 | 5,3383808776095991E-17 | 8,412E-19 | 17,32 | 0,332542 | -1,000 |
| | 2 | 3,1999265143143972E-13 | | 14,84 | 0,291578 | 1,000 |
| | 3 | 1,4917924794345147E-09 | | 11,92 | 0,226991 | -1,000 |
| | 4 | 5,5633694691455408E-06 | | 8,71 | 0,144002 | 1,000 |
| | 5 | 1,5015118547672490E-02 | | 5,27 | 0,049335 | -1,000 |
| | | | | 6,94 | 1 | -1,000 |
| 6 | 1 | 3,3122843081152947E-21 | 4,416E-23 | 21,60 | 0,336506 | 1,000 |
| | 2 | 2,7796593563247891E-17 | | 19,12 | 0,306888 | -1,000 |
| | 3 | 1,8512987527090879E-13 | | 16,20 | 0,259435 | 1,000 |
| | 4 | 1,0356869183867694E-09 | | 12,99 | 0,196901 | -1,000 |
| | 5 | 4,6556750889044544E-06 | | 9,55 | 0,122916 | 1,000 |
| | 6 | 1,5014838755060688E-02 | | 5,95 | 0,041782 | -1,000 |
| | | | | 7,23 | 1 | 1,000 |
| 7 | 1 | 1,4714038901329236E-25 | 1,700E-27 | 26,01 | 0,339002 | -1,000 |
| | 2 | 1,6464065456834710E-21 | | 23,53 | 0,316616 | 1,000 |
| | 3 | 1,4803422581677162E-17 | | 20,61 | 0,280397 | -1,000 |
| | 4 | 1,1502549747430354E-13 | | 17,40 | 0,231920 | 1,000 |
| | 5 | 7,5841142089346566E-10 | | 13,97 | 0,173304 | -1,000 |
| | 6 | 4,0002514236449248E-06 | | 10,36 | 0,107110 | 1,000 |
| | 7 | 1.5014665937644062E-02 | | 6,61 | 0,036232 | -1,000 |
| | | | | 7,48 | 1 | -1,000 |
| 8 | 1 | 4,9094584912732290E-30 | 5,005E-32 | 30,54 | 0,340674 | 1,000 |
| | 2 | 7,0629234221069461E-26 | | 28,07 | 0,323175 | -1,000 |
| | 3 | 8,2322200164928441E-22 | | 25,14 | 0,294671 | 1,000 |
| | 4 | 8,4436207572814150E-18 | | 21,93 | 0,256133 | -1,000 |
| | 5 | 7,5918679419097218E-14 | | 18,50 | 0,208871 | 1,000 |
| | 6 | 5,7843261809175699E-10 | | 14,89 | 0,154494 | -1,000 |
| | 7 | 3,5055541995609174E-06 | | 11,14 | 0,094854 | 1,000 |
| | 8 | 1,5014551588765371E-02 | | 7,27 | 0,031981 | -1,000 |
| | | | | 7,69 | 1 | 1,000 |
| 9 | 1 | 1,2753104925904539E-34 | 1,163E-36 | 35,18 | 0,341848 | -1,000 |
| | 2 | 2,2933880129058559E-30 | | 32,70 | 0,327798 | 1,000 |
| | 3 | 3,3604415030680099E-26 | | 29,78 | 0,304808 | -1,000 |
| | 4 | 4,3867863588925120E-22 | | 26,56 | 0,273504 | 1,000 |
| | 5 | 5,1276093588457596E-18 | | 23,13 | 0,234739 | -1,000 |
| | 6 | 5,2592384641911087E-14 | | 19,53 | 0,189569 | 1,000 |
| | 7 | 4,5535119335016159E-10 | | 15,78 | 0,139227 | -1,000 |
| | 8 | 3,1192314832511970E-06 | | 11,90 | 0,085086 | 1,000 |
| | 9 | 1,5014471950731382E-02 | | 7,92 | 0,028622 | -1,000 |

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | 7,87 | 1 | -1,000 |
| 10 | 1 | 2,6520784728307247E-39 | 2,189E-41 | 39,90 | 0,342703 | 1,000 |
| | 2 | 5,8290603839808654E-35 | | 37,42 | 0,331178 | -1,000 |
| | 3 | 1,0482368526109931E-30 | | 34,50 | 0,312256 | 1,000 |
| | 4 | 1,6942025890207451E-26 | | 31,29 | 0,286359 | -1,000 |
| | 5 | 2,4881012710359716E-22 | | 27,86 | 0,254064 | 1,000 |
| | 6 | 3,2811419785502835E-18 | | 24,25 | 0,216094 | -1,000 |
| | 7 | 3,7878720989661955E-14 | | 20,50 | 0,173296 | 1,000 |
| | 8 | 3,6760338836132970E-10 | | 16,63 | 0,126625 | -1,000 |
| | 9 | 2,8093264295481767E-06 | | 12,64 | 0,077125 | 1,000 |
| | 10 | 1,5014414240595419E-02 | | 8,56 | 0,025901 | -1,000 |
| | | | | 8,07 | 1 | 1,000 |
| 11 | 1 | 4,5146463268085697E-44 | 3,402E-46 | 44,71 | 0,343346 | -1,000 |
| | 2 | 1,1907412872866322E-39 | | 42,23 | 0,333723 | 1,000 |
| | 3 | 2,5774988636019467E-35 | | 39,31 | 0,317884 | -1,000 |
| | 4 | 5,0471084777248979E-31 | | 36,10 | 0,296124 | 1,000 |
| | 5 | 9,0761600698965902E-27 | | 32,67 | 0,268847 | -1,000 |
| | 6 | 1,4894885153776470E-22 | | 29,06 | 0,236562 | 1,000 |
| | 7 | 2,1924095753199824E-18 | | 25,31 | 0,199870 | -1,000 |
| | 8 | 2,8160897238665831E-14 | | 21,44 | 0,159454 | 1,000 |
| | 9 | 3,0290231765024620E-10 | | 17,45 | 0,116066 | -1,000 |
| | 10 | 2,5552751582990189E-06 | | 13,37 | 0,070516 | 1,000 |
| | 11 | 1,5014371072457277E-02 | | 9,21 | 0,023652 | -1,000 |
| | | | | 7,25 | 1 | -1,000 |
| 12 | 1 | 6,4068248400642276E-49 | 4,441E-51 | 49,60 | 0,343841 | 1,000 |
| | 2 | 1,9970427266681404E-44 | | 47,12 | 0,335686 | -1,000 |
| | 3 | 5,1208986659518655E-40 | | 44,20 | 0,322238 | 1,000 |
| | 4 | 1,1937453852757139E-35 | | 40,98 | 0,303708 | -1,000 |
| | 5 | 2,5760450970163208E-31 | | 37,55 | 0,280389 | 1,000 |
| | 6 | 5,1334680546085089E-27 | | 33,95 | 0,252647 | -1,000 |
| | 7 | 9,3340056366216114E-23 | | 30,20 | 0,220921 | 1,000 |
| | 8 | 1,5186540129583026E-18 | | 26,32 | 0,185710 | -1,000 |
| | 9 | 2,1493523320428086E-14 | | 22,34 | 0,147570 | 1,000 |
| | 10 | 2,5385332350870401E-10 | | 18,26 | 0,107102 | -1,000 |
| | 11 | 2,3432632977312761E-06 | | 14,09 | 0,064944 | 1,000 |
| | 12 | 1,5014337928885689E-02 | | 9,84 | 0,021763 | -1,000 |
| | | | | 6,36 | 1 | 1,000 |
| 13 | 1 | 7,6954991555699224E-54 | 4,939E-56 | 54,55 | 0,344231 | -1,000 |
| | 2 | 2,7985186008430615E-49 | | 52,07 | 0,337232 | 1,000 |
| | 3 | 8,3876261414759264E-45 | | 49,15 | 0,325674 | -1,000 |
| | 4 | 2,2941743860115923E-40 | | 45,94 | 0,309712 | 1,000 |
| | 5 | 5,8446062627930774E-36 | | 42,51 | 0,289562 | -1,000 |
| | 6 | 1,3873617365327650E-31 | | 38,90 | 0,265495 | 1,000 |
| | 7 | 3,0431358086484149E-27 | | 35,15 | 0,237838 | -1,000 |
| | 8 | 6,0804732806425532E-23 | | 31,27 | 0,206965 | 1,000 |
| | 9 | 1,0843263075337922E-18 | | 27,29 | 0,173292 | -1,000 |
| | 10 | 1,6770819261059198E-14 | | 23,21 | 0,137276 | 1,000 |
| | 11 | 2,1579797159879636E-10 | | 19,04 | 0,099402 | -1,000 |
| | 12 | 2,1636745133329660E-06 | | 14,80 | 0,060184 | 1,000 |
| | 13 | 1,5014311929693630E-02 | | 10,48 | 0,020152 | -1,000 |